$x_{k+1} = x_k - J_F(x_k)^{-1} F(x_k)$.

def. $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ – přírůstek.

$$\boxed{\begin{aligned} J_F(x_k)\,\Delta x_k &= -F(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + \Delta x_k \end{aligned}}$$

← soustava lin. rovnic, iterační

<u>Optimalizace</u>: chci minimum funkce (funkcionálu), chci bod, kde je minimum.

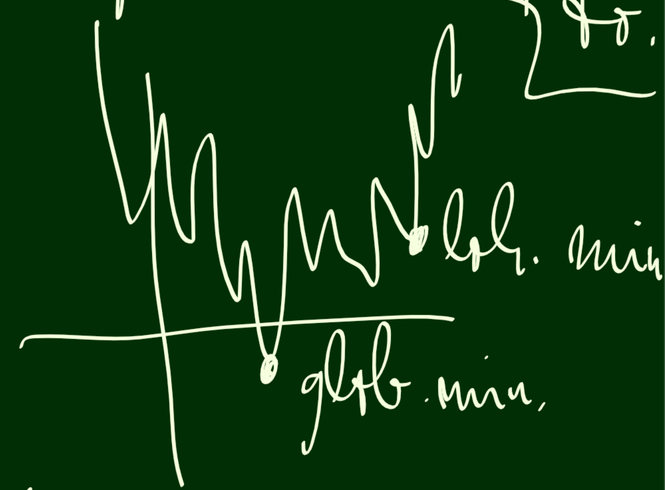
- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, chci $\bar{x} = \underset{x \in M}{\operatorname{argmin}}\, f(x)$, kde $M \subset \mathbb{R}^n$.

  $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in M$.

- $M \begin{cases} = \mathbb{R}^n & \text{– nepodmíněná optimalizace} \\ \subset \mathbb{R}^n & \text{– podmíněná optimalizace} \end{cases}$

- minimum – lokální: $f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in M \cap U,\ U \in \mathcal{O}(\bar{x})$

  globální – // – $\forall x \in M$ – těžké najít, zatímco právě to.



Př: • nejmenší čtverce: $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$

- nalADit parametry modelu.
- <u>Machine learning</u>, AI, neuronové sítě. Učení.

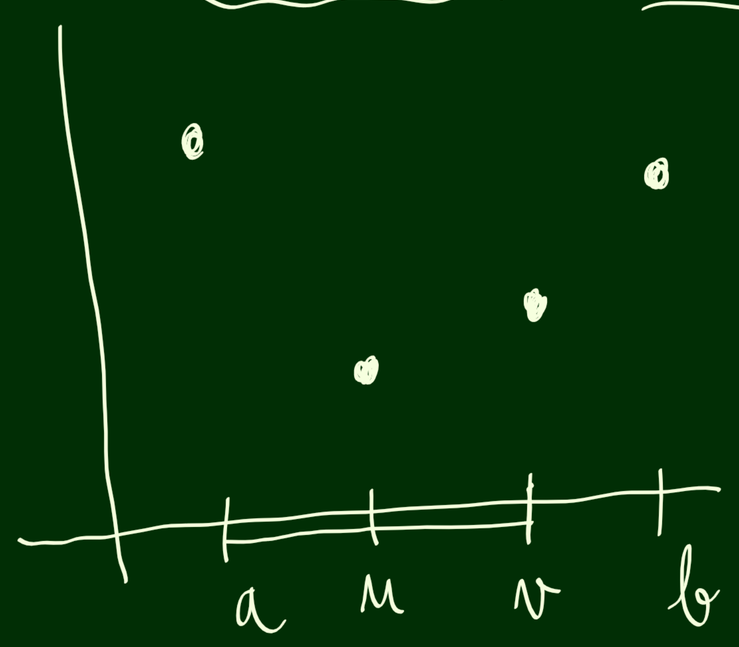
  – metoda největšího spádu (cost function)

- <u>Prvočíselné dvojčata</u>: Yitang Zhang 2013

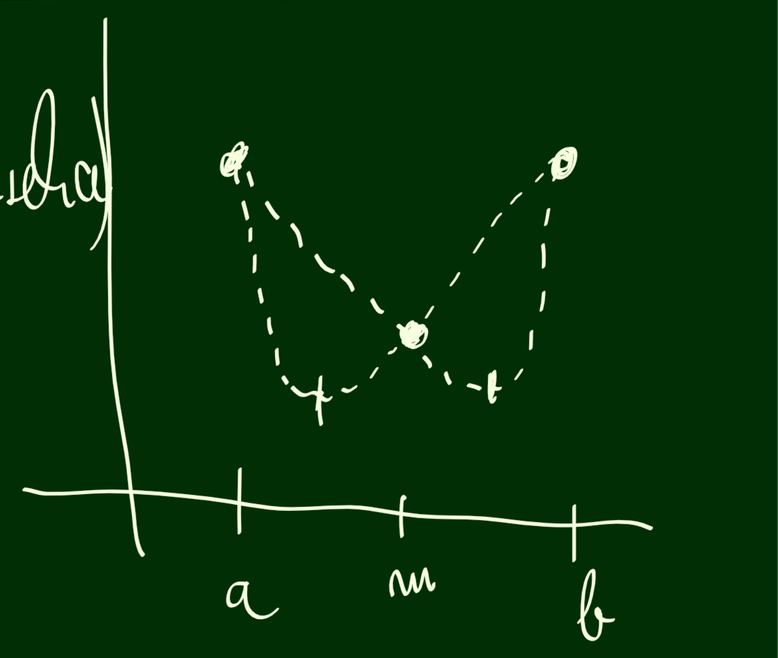
  $\exists\, \infty$ mnoho dvojic prvočísel: $p_{n+1} - p_n \leq 2$ místo 2 dokázal $7 \cdot 10^7$.

  Num. optimalizace → 246.

<u>Minimalizace v $\mathbb{R}$</u>: <u>Metoda zlatého řezu</u>: (analogie bisekce)



$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in [a, v]$



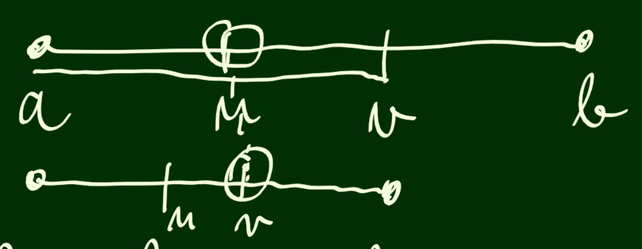
Algoritmus: $[a_0, b_0] = [a, b]$

Pro $k = 1, \dots$ zvol $u_k < v_k \in I_k = [a_k, b_k]$

If $f(u_k) \le f(v_k)$: $a_{k+1} := a_k$, $b_{k+1} := v_k$

else: $a_{k+1} := u_k$, $b_{k+1} := b_k$.

Volba u, v v $[a, b]$? Chci už napočítanou hodnotu $f(u)$ využít v další iteraci.



Tj. chci, aby bod u hrál v $[a, v]$ stejnou roli jako v hrálo v $[a, b]$.

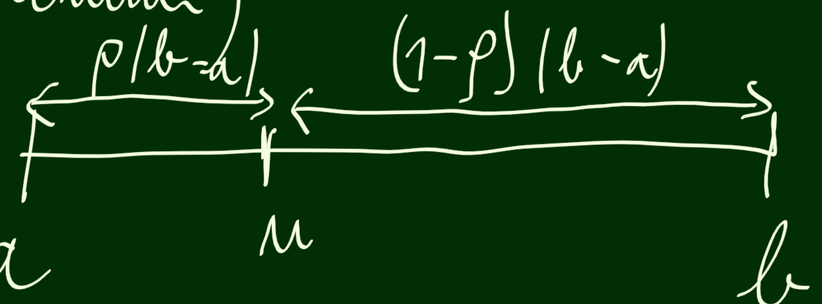
$u := a + \rho(b-a)$

$v := b - \rho(b-a)$, chci $\dfrac{u-a}{v-a} = \dfrac{v-a}{b-a}$

$$\frac{\rho(b-a)}{b-a-\rho(b-a)} = \frac{b-a-\rho(b-a)}{b-a} \Rightarrow \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1-\rho}{1}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382\dots, \quad 1-\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

– Vždy funguje ($f \in C[a,b] \Rightarrow$ konverguje k minimu)



Newton: aproximuji $f \approx p$, $p \in P^2$ = kvadratická funkce, $\bar{x} \approx \operatorname{argmin} p$

$f \in C^2(\mathbb{R})$, $f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}_{p(x)} + \cancel{R}$

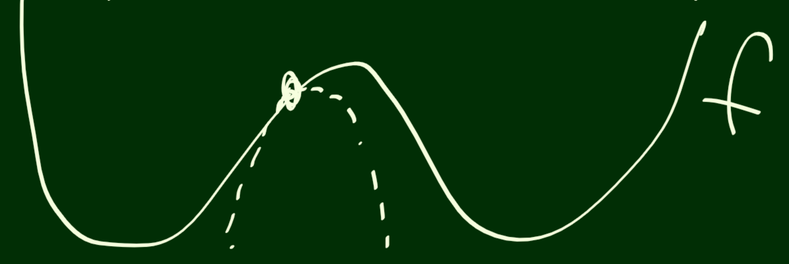
$p(x_0) = f(x_0)$, $p'(x_0) = f'(x_0)$, $p''(x_0) = f''(x_0)$.

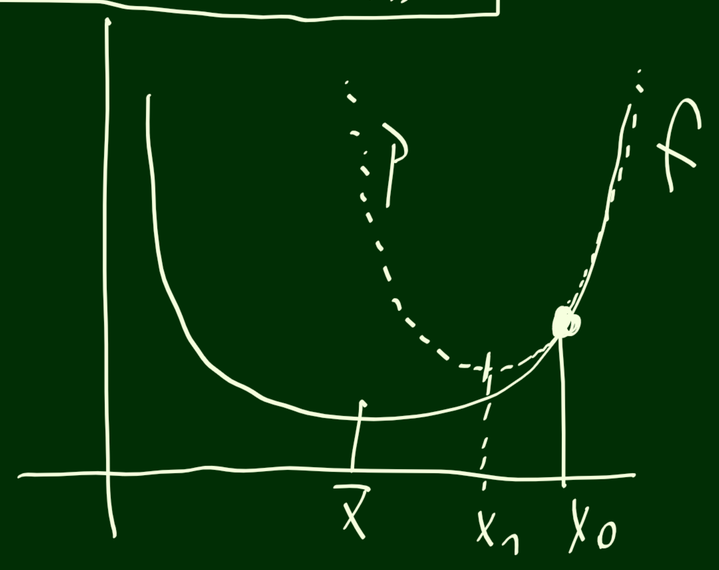
$p'(x) = 0 \iff f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) = 0$

$$x = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} =: x_1$$

Def: Newtonova metoda (pro minimalizaci) $\boxed{x_{k+1} = x_k - \dfrac{f'(x_k)}{f''(x_k)}}$

Pozn: Vlastně Newton pro hledání kořene $f'(x) = 0$.





Optimalizace v $\mathbb{R}^n$ $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Podmínky pro $\exists$ extrému: Nutná: $\bar{x}$ je lok. minimum, $\exists\, \nabla f(\bar{x}) \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = o$.

Postačující: $f \in C^2(M)$, $\nabla f(\bar{x}) = o$, $H_f(\bar{x}) = \nabla^2 f(\bar{x})$ je poz. def.
$\Rightarrow \bar{x}$ je lokální minimum.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}, & \dots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Metody spádových směrů: Dáno $x_0 \in \mathbb{R}^n$, hledám $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$: $x_k \to \bar{x}$.

Hledám tvaru $\boxed{x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k}$, kde $d_k \in \mathbb{R}^n$ je směr, $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$ je krok tak, aby $f(x_{k+1}) < f(x_k)$.

Definice: Dáno $x \in \mathbb{R}^n$, pak směr $d \in \mathbb{R}^n$ je spádový, pokud $\exists\, \bar{\alpha} > 0$: $f(x + \alpha d) < f(x) \quad \forall \alpha \in (0, \bar{\alpha})$.

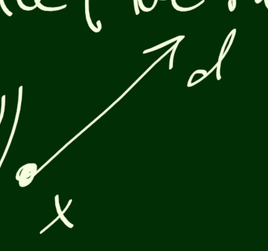
Lemma: Nechť $\exists \nabla f(x)$, pak d je spádový směr v $x \iff \underbrace{\nabla f(x) \cdot d}_{\text{derivace } f \text{ ve směru } d} < 0$

Dk: def: $g(\alpha) = f(x + \alpha d)$, $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$g'(0) = \nabla f(x) \cdot d < 0$

$f(x^{(1)} + \alpha d^{(1)}, x^{(2)} + \alpha d^{(2)}, \dots, x^{(n)} + \alpha d^{(n)})$

$\frac{\partial f}{\partial x^{(1)}} d^{(1)} + \frac{\partial f}{\partial x^{(2)}} \cdot d^{(2)} \dots$



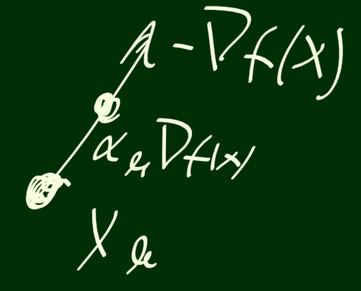
Lemma: Největší spád má f ve směru $-\nabla f(x)$.

Dk: BÚNO $\|d\| = 1$. Derivace f ve směru d $\nabla f(x) \cdot d$, dle co nejzápornější.

Cauchy-Schwarz $\Rightarrow |\nabla f(x) \cdot d| \le \|\nabla f(x)\| \cdot \underbrace{\cancel{\|d\|}}_{=1} \Rightarrow \nabla f(x) \cdot d \ge -\|\nabla f(x)\|$

Pro $d = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ je $\nabla f(x) \cdot d = -\frac{\|\nabla f(x)\|^{\cancel{2}}}{\cancel{\|\nabla f(x)\|}} = -\|\nabla f(x)\|$.

Metoda největšího spádu: $\boxed{x_{k+1} = x_k - \alpha_k Df(x_k)}$

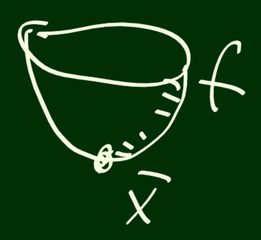


Volba α_k:
- $\alpha_k = \alpha$ dostatečně malé.
- $\alpha_k \to 0$ pro $k \to \infty$, Musí být $\sum_k \alpha_k = \infty$, $\alpha_k = \frac{1}{k}$.
- Line search: def $g(\alpha) = f(x_k - \alpha Df(x_k))$, minimalizuji $g(\alpha)$ – 1D problém
  zlatý řez. – stačí přibližně
- Přesný line search: $\alpha_k = \operatorname{argmin}_{\alpha > 0} g(\alpha)$. (optimální krok)

Lemma (Zig-zag effect): směry d_k, d_{k+1} jsou na sebe kolmé (M. největšího spádu + přesný line search).
– může kvůli nerovnost strašně pomalu.

Věta: $f \in C^2$, pak $\forall$ lokální bod $\bar{x}$ posloupnosti $\{x_k\}$ (M. nejv. spádu s opt. krokem, nebo dost malým konstantním krokem) splňuje $Df(\bar{x}) = 0$.

Důsledek: $f \in C^2$ ryze konvexní



, pak $x_k \to \bar{x}$.